

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA): é um caso especial de sequência, onde a **diferença** entre cada termo e o seu antecessor é sempre igual e chamada de **razão r**.

Exemplo: Na PA (3, 5, 7, 9, 11, 13), temos:

$$a_1 = 3 \text{ (primeiro termo)} \quad a_2 = 5 \text{ (segundo termo)} \quad a_3 = 7 \text{ (terceiro termo)} \quad r = 2 \text{ (razão da PA)}$$

OBS.: quando $r = 0$, a P.A. é constante; $r > 0$ a P.A. é crescente e, $r < 0$ a P.A. é decrescente.

FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA P.A.: Na sequência ($a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$) de razão r , podemos escrever:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Onde: a_n = último termo da PA ou termo procurado;

a_1 = primeiro termo da PA;

n = número de elementos da PA.

r = razão da PA.

Podemos estender a definição do termo geral para:

$$a_7 = a_1 + 6r \quad a_9 = a_5 + 4r \quad a_5 = a_9 - 4r \quad a_n = a_5 + (n - 5)r$$

Exemplos:

1) Calcular o trigésimo segundo termo da P.A. (1, 4, 7, 10, ...).

Temos que $a_1 = 1$, $r = 3$ e $n = 32$, usando a fórmula: $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_{32} = 1 + (32 - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_{32} = 1 + 31 \cdot 3 \Rightarrow a_{32} = 94$

2) Numa PA de 6 termos, o último termo é 13 e a razão é 2, calcule o primeiro termo.

Temos que $n = 6$, $a_n = 13$ e $r = 2$, usando a fórmula: $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 13 = a_1 + (6 - 1) \cdot 2 \Rightarrow 13 = a_1 + 10 \Rightarrow a_1 = 3$

3) Numa PA de 16 termos, o último termo é 65 e o primeiro é 5, calcule a razão da PA.

Temos que $n = 16$, $a_n = 65$ e $a_1 = 5$, usando a fórmula: $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 65 = 5 + (16 - 1) \cdot r \Rightarrow 65 = 5 + 15r \Rightarrow r = 4$

4) Na PA onde $a_1 = 18$ e a razão $r = 3$, que lugar ocupa o elemento 90?

Temos que $a_1 = 18$, $r = 3$ e $a_n = 90$, usando a fórmula: $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 90 = 18 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 25$, ou seja, ocupa o 25º lugar, é o termo a_{25}

5) Completar a PA (.....; 13;;;; 41;)

Temos que $a_2 = 13$ e $a_6 = 41$, usando a fórmula: $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_6 = a_2 + (6 - 2) \cdot r \Rightarrow 41 = 13 + 4r \Rightarrow r = 7$, então temos $a_1 = a_2 - r \Rightarrow a_1 = 6$ Logo, (6; 13; 20; 27; 34; 41; 48)

6) Construa uma PA, inserindo 4 meios aritméticos entre 3 e 38.

Inserindo os 4 termos, temos: 3, _____, _____, _____, _____, 38, onde $a_1 = 3$; $a_n = 38$ e $n = 6$, usando a fórmula: $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow r = 7$. Logo, PA (3, 10, 17, 24, 31, 38).

Exercícios da aula:

1) Determinar o 48º termo da P.A. (3, 7, 11, 15, ...).

2) Calcule o 17º termo da P.A. cujo primeiro termo é 3 e cuja razão é 5.

- 3)Obtenha o primeiro termo da P.A. de razão 4 cujo 23º termo é 86.
- 4)Obtenha a razão da P.A. em que o primeiro termo é -8 e o vigésimo é 30.
- 5)Quantos termos possui a PA, onde $a_1 = 7$, $r = 5$ e $a_n = 102$?
- 6)Qual é o termo igual a 60 na P.A. em que o 2º termo é 24 e a razão é 2?
- 7)Determine a P.A. em que o 6º termo é 7 e o 10º é 15.
- 8)Qual é a P.A. em que o 1º termo é 20 e o 9º termo é 44?
- 9)Intercale 8 meios aritméticos entre 100 e 163.
- 10)Quantos números ímpares há entre 14 e 192?

Respostas: 1)191 2)83 3)-2 4)2 5)20 6) a_{20} 7) $(-3, -1, 1, 3, \dots)$ 8) $(20, 23, 26, \dots)$
9) $(100, 107, 114, 121, 128, 135, 142, 149, 156, 163)$ 10)89

PROPRIEDADE DE TRÊS TERMOS CONSECUTIVOS DE UMA P.A.: Cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética dos termos antecessor e sucessor. Em outras palavras, sendo uma P.A. $(a, b, c, \dots)$, temos:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

Exemplos:

- 1)Calcule o segundo termo da progressão aritmética $(4; x; 10; \dots)$.

$$x = \frac{4 + 10}{2} = 7$$

- 2)Calcule x para que a sequência $(\dots; x - 2; 5; 2x + 1; \dots)$ seja, nessa ordem, uma P.A.

$$5 = \frac{(x - 2) + (2x + 1)}{2} = \frac{11}{3}$$

- 3)A soma dos três primeiros termos de uma PA é igual a 30, calcule o segundo termo.

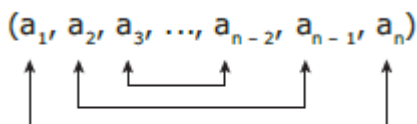
Podemos escrever uma PA de 3 termos, da seguinte forma: $(a_2 - r, a_2, a_2 + r)$. Onde: $a_2 - r + a_2 + a_2 + r = 30 \Rightarrow a_2 = 10$.

Exercícios da aula:

- 1)Calcule o segundo termo da progressão aritmética $(6; x; 12; \dots)$.
- 2)Calcule x para que a sequência $(\dots; x - 2; 2x; 16 + x; \dots)$ seja, nessa ordem, uma P.A.
- 3)Se x, x+5 e -6 são termos consecutivos de uma PA, então o valor de x é:
- 4)Calcule x para que a sequência $(\dots; x + 1; 2x; x^2 - 5; \dots)$ seja, nessa ordem, uma P.A. **crescente**.
- 5)A soma dos três primeiros termos de uma PA é igual a 27, calcule o segundo termo.

Respostas: 1)9 2)7 3)-16 4)-1 ou 4 5)9

PROPRIEDADE DOS TERMOS EQUIDISTANTES DE UMA P.A.: A soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma P.A. finita é igual à soma dos extremos.



$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$$

Dessa forma, na progressão $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_9, \dots)$, temos:

a_4 e a_6 equidistam de a_1 e a_9 pois: $4 + 6 = 1 + 9$

a_3 e a_{15} equidistam de a_1 e a_{17} pois: $3 + 15 = 1 + 17$

Exemplo: sabendo que a soma do terceiro e do décimo nono termo de uma P.A. é igual a 100, determinar o décimo primeiro termo.

$$a_3 + a_{19} = a_{11} + a_{11} \Rightarrow 2a_{11} = 100 \Rightarrow a_{11} = 50$$

Exercícios da aula: como são raros os exercícios que utilizam esta propriedade, não faremos exercícios.

SOMA DOS TERMOS DE UMA P.A.: Se S_n for a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ então:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Onde: S_n = soma dos termos de uma PA;

a_1 = primeiro termo da soma;

a_n = último termo da soma.

n = quantidade de termos da soma.

Exemplo: Calcular a soma dos 20 primeiros termos da P.A. $(7, 10, 13, \dots)$

O vigésimo termo da progressão em que $a_1 = 7$ e $r = 3$ é $a_{20} = 7 + (20 - 1) \cdot 3 = 64$ A

soma dos vinte primeiros termos é $S_{20} = 710$, obtido pela fórmula acima.

Exercícios da aula:

1)Obtenha a soma dos 12 primeiros termos da P.A. $(6, 14, 22, \dots)$.

2)Calcule a soma dos 25 termos iniciais da P.A. $(1, 7, 13, \dots)$.

3)Numa progressão aritmética limitada em que o 1º termo é 3 e o último 31, a soma de seus termos é 136. Determine o número de termos dessa progressão.

4)Qual é a soma dos múltiplos positivos de 5 formados por 3 algarismos?

Respostas: 1)600 2)1.825 3)8 4)98.550